

2.- [20 puntos] Sea A el conjunto de todos los divisores positivos de 36, consideramos en él la relación binaria dada por

$$a R b \text{ si y sólo si } a \mid b$$

Se pide:

- [3 puntos] Determinar si R es una relación de equivalencia.
- [3 puntos] Calcular una partición de A tal que $A_1 = \{1, 36\}$ sea un conjunto de dicha partición y A_2 el conjunto de los divisores primos de 36 sea otro. Comprobar que lo es.
- [4 puntos] Definir una aplicación sobreyectiva de A en $P(\{2, 3\} \times \{1\})$.
- [4 puntos] Comprobar que R es relación de orden y dibujar el diagrama de orden. Calcular los elementos maximales y minimales de $A - \{1, 36\}$.
- [6 puntos] ~~Definir retículo y determinar si A es un retículo. En caso afirmativo calcular si existen los elementos 0, 1; determinar quiénes son sus operaciones, ¿es complementado?, ¿es A un álgebra de Boole?~~

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}.$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$a R b \Leftrightarrow a \mid b$$

$$'a' \text{ divide a } 'b', \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } b = k \cdot a$$

$$'b' \text{ es múltiplo de } 'a'$$

$$'a' \text{ es divisor de } 'b'.$$

a) La simétrica no se verifica

$$2 \mid 4$$

$$2 \nmid 4$$

{ No es simétrica

No es relación de equivalencia.

$$b) \quad A_1 = \{1, 3, 6\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$A_2 = \{2, 3\}$$

$$A_3 = \{4, 6, 9, 12, 18\}$$

$$(i) \quad A_1, A_2, A_3 \neq \emptyset$$

$$(ii) \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_3 = \emptyset$$

$$(iii) \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$$

$\{A_1, A_2, A_3\}$ es una
partición de A .

$$\{A_i\}_{i \in I}, \quad I = \{1, 2, 3\}.$$

$$c) \quad \{2, 3\} \times \{1, 1\} = \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$P(\{(2, 1), (3, 1)\}) = \{\emptyset, \{(2, 1)\}, \{(3, 1)\}, \{(2, 1), (3, 1)\}\}$$

$$f: A \longrightarrow P(\{(2, 1), (3, 1)\})$$

$$1 \longmapsto \emptyset$$

$$2 \longmapsto \emptyset$$

$$3 \longmapsto \{(2, 1)\}$$

$$4 \longmapsto \{(2, 1)\}$$

$$6 \longmapsto \{(3, 1)\}$$

$$9 \longmapsto \{(3, 1)\}$$

$$12 \longmapsto \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$18 \longmapsto \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$36 \longmapsto \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$f(1) = \emptyset$$

$$f(2) = \emptyset$$

$$f(3) = f(4) = \{(2, 1)\}$$

⋮

d) Reflexiva : $a R a \quad \forall a \in \mathbb{A} \quad ??$
 $a | a$ porque $a = 1 \cdot a$.

Antisimétrica : $\left. \begin{array}{l} a R b \\ b R a \end{array} \right\} \Rightarrow a = b \quad ??$

$$\left. \begin{array}{l} a R b \Rightarrow a | b \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \text{ tq } b = k_1 \cdot a \\ b R a \Rightarrow b | a \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \text{ tq } a = k_2 \cdot b \end{array} \right\}$$

$$b = k_1 \cdot (k_2 \cdot b) = (k_1 \cdot k_2) \cdot b \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} k_1, k_2 = 1 \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_1 = k_2 = 1 \\ \vee \\ k_1 = k_2 = -1 \end{array} \right.$$

$a = k_2 b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, son positivas, por tanto

$$k_1, k_2 \geq 0$$

y entonces $k_1 = k_2 = 1$, $\Rightarrow \underline{\underline{a = b}}$.

c) Transitiva : $\left. \begin{array}{l} a R b \\ b R c \end{array} \right\} \Rightarrow a R c \quad ??$

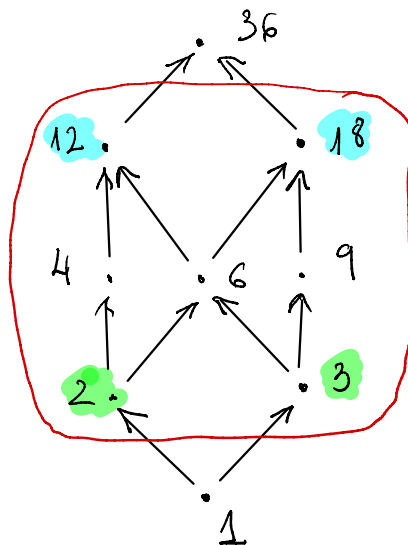
$$\left. \begin{array}{l} a R b \Rightarrow a | b \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \text{ tq } b = k_1 \cdot a \\ b R c \Rightarrow b | c \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \text{ tq } c = k_2 \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$c = \underbrace{k_2 \cdot k_1}_{\in \mathbb{Z}} \cdot a, \Rightarrow a | c \Rightarrow a R c.$$

Es relación de orden.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$A - \{1, 36\}$$



Maximales : 12, 18

Minimales : 2, 3

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (1, 12), (1, 18), (1, 36), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (2, 18), (2, 36), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (3, 12), (3, 18), (3, 36), (4, 4), (4, 12), (4, 36), (6, 6), (6, 12), (6, 18), (6, 36), (9, 9), (9, 18), (9, 36), (12, 12), (12, 36), (18, 18), (18, 36), (36, 36)\}$$